

2. dobrovoľná domáca úloha

Na to aby ste dostali body k čokoláde a potešilo ma, tak sa stačí vážne sa pokúsiť vyriešiť a napísať k čomu ste sa dostali pri ľubovoľnej z týchto dvoch úloh:

Praktická úloha: Vyriešte úlohu 5 (c) z druhého cvičenia. Tu je mojím hlavným cieľom zistiť, nakoľko ste to pochopili, takže ma veľmi potešia aj čiastočné, alebo nesprávne riešenia.

Teoretická úloha: Je tu, lebo mi príde pekná a bádavá, no je kúsok náročnejšia. Cieľom je ukázať, že v $\mathbb{R}^n$, existujú iba 2 množiny, ktoré sú zároveň otvorené a uzavreté. Vie nám to pomôcť pri vyšetrovaní otvorenosti / uzavrenosti, poprípade kompaktnosti množín. Ak už vieme, že množina je otvorená a nie je veľmi špeciálna, tak už vieme, že nie je uzavretá.

Příklad 1.

- (a) Ukážte, že množiny $\mathbb{R}^n$ a $\emptyset$ sú aj otvorené aj uzavreté. Mali by ste to aj vedieť z prednášky :).
- (b) Ukážte, že žiadna iná množina nie je aj otvorená aj uzavretá. Návod:
 - (i) Predpokladajte, že vaša množina je neprázdna a nie je celé $\mathbb{R}$ a je otvorená. Chceme ukázať, že už nie je uzavretá.
 - (ii) Nech $x \in M$ a $y \in \mathbb{R} \setminus M$. Predpokladajte, že $y < x$ a ukážte, že pre $a = \inf\{z \in M; y < z\}$ platí, že $a \in \partial M$ a $a \notin M$.
 - (iii) Porozmýšľajte, že to už je všetko čo sme chceli a ako by to vyzeralo, ak $x < y$.
- (c) V $\mathbb{R}^n$ sa to dá vcelku pekne odvodiť, z výsledku pre $\mathbb{R}$, ale mal som pocit, že toho už je dosť aj tak :). Chcel som však poznamenať, že aj v $\mathbb{R}^n$ to platí. Ak máš stále chuť, tak sa kludne zamysli, ale nečakám to.

